Писмени испит из Алгебре 1
20.1.2016.

1 Нека је $(G,\star)$ група и $\Phi : G \longrightarrow S_G$ задато са $\Phi(g)(x) = g\star x$. Показати да је Φ хомоморфизам група $(G,\star)$ и $(S_G,\circ)$. Доказати да је група G Абелова акко је $\Psi : g \mapsto \Phi(g)(g)$ ендоморфизам групе G.

Решење. Нека су $g, h \in G$ произвољни. За свако $x \in G$ важи $\Phi(g\star h)(x) = (g\star h)\star x = g\star(h\star x) = \Phi(g)(h\star x) = \Phi(g)(\Phi(h)(x)) = (\Phi(g)\circ\Phi(h))(x)$, одакле следи да је $\Phi(g\star h) = \Phi(g)\circ\Phi(h)$, тј. Φ је хомоморфизам.

$\Psi(g) = \Phi(g)(g) = g\star g = g^2$. Φ је ендоморфизам акко за свака два елемента g и h из G важи $\Phi(g\star h) = \Phi(g)\star\Phi(h)$ тј. $g\star h\star g\star h = g\star g\star h\star h$. Ово последње је еквивалентно са $h\star g = g\star h$, односно да је група G Абелова.

2 Нека је $C_{2016} = \langle a\rangle$ циклична група. Одредити број свих њених подгрупа, написати све елементе њене подгрупе реда 6 и одредити број свих њених елемената реда 504.

Решење. Ред подгрупе дели ред групе и за сваки делилац реда групе постоји тачно једна подгрупа тог реда. Зато је број подгрупа једнак $\tau(2016) = \tau(2^5\cdot 3^2\cdot 7) = \tau(2^5)\tau(3^2)\tau(7) = 6\cdot 3\cdot 2 = 36$.

Подгрупа реда 6 је $\langle a^{336}\rangle = \{e, a^{336}, a^{672}, a^{1008}, a^{1344}, a^{1680}\}$.

Сваки елемент реда 504 се налази у цикличној погрупи реда 504 (која је генерисана тим елементом). Пошто постоји тачно једна подгрупа реда 504, елементи реда 504 су њени генератори. Има их $\varphi(504) = \varphi(2^3\cdot 3^2\cdot 7) = \varphi(2^3)\varphi(3^2)\varphi(7) = (8-4)(9-3)(7-1) = 144$.

3 Одредити извод диедарске групе D_{13}. Показати да је $D_{13}^{ab} \cong Z_2$.

Решење. Извод диедарске групе смо рачунали на часу, добија се $DD_{13} = \langle\rho^2\rangle = \langle\rho\rangle$ (88. задатак у скрипти).

Нека је $\Phi : D_{13} \longrightarrow Z_2$ такво да слика парне изометрије у 0, а непарне у 1. Очигледно је Φ хомоморфизам група $(D_{13},\circ)$ и $(Z_2, +_2)$. Φ је ,,на“, а језгро му је $\langle\rho\rangle$. Према првој теореми о изоморфизмима је $\operatorname{Im}\Phi \cong D_{13}/\operatorname{Ker}\Phi$, тј. $Z_2 \cong D_{13}/DD_{13} = D_{13}^{ab}$.

4 Дата је пермутација $\pi \in S_{10}$ реда 20. Испитати знак (парност) пермутације π.

Решење. π има циклусну декомпозицију $\pi_1\pi_2\dots\pi_n$, где су π_i циклуси дужине r_i. Треба да важи $r_1+\dots+r_n = 10$ и *НЗД*$(r_1,\dots,r_n) = 20$. Један од r_i-ова нпр. r_1 мора да буде дељив са 5 и мањи или једнак 10, дакле може да буде 5 или 10. r_1 није 10 јер би тада било $\pi = \pi_1$, што даље повлачи $r(\pi) = 10$. Слично, $4|r_2$ и $r_2 \leqslant 10-5 = 5$, следи $r_2 = 4$. Закључујемо да је једина могућност $n = 3$ и $r_3 = 1$. Коначно, $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{r_1+r_2+r_3-3} = (-1)^{5+4+1-3} = -1$.

5 Одредити последње две цифре броја $123^{456^{789}}$.

Решење. Последње две цифре су остатак при дељењу са $100 = 4\cdot 25$. Према кинеској теореми довољно је наћи остатке при дељењу са 4 и 25.

$$n = 123^{456^{789}} \equiv_4 (-1)^{456^{789}} = 1$$

$$n = 123^{456^{789}} \equiv_{25} (-2)^{456^{789}} = 2^{456^{789}}$$

Према Ојлеровој теореми је $2^{\varphi(25)} = 2^{20} \equiv_{25} 1$, тако се проблем своди на одређивање остатка при дељењу 456^{789} са 20. 456^{789} је дељив са 4 и $456^{789} \equiv_5 1^{789} = 1$, према кинеској теореми је $456^{789} \equiv_{20} 16$.

$$n \equiv_{25} 2^{16} = 256^2 \equiv_{25} 6^2 \equiv_{25} 11$$

Кинеска теорема гарантује јединствено решење. Овде се види да је то $n \equiv_{100} 61$.

6 Група G је задата генераторима x_1, x_2 и x_3 и релацијама

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \end{array}$$

Одредити нормалну и елементарну форму групе G.

Решење.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[V_3 \to V_3 - 3V_1]{V_2 \to V_2 - 2V_1} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -14 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[K_3 \to K_3 - 2K_1]{K_2 \to K_2 - 3K_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[K_2 \leftrightarrow K_3]{K_3 \to -K_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{V_3 \to V_3 - 2V_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{K_3 \to K_3 + 7K_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$G \cong Z_2^2 \times Z_{20} \cong Z_2^2 \times Z_4 \times Z_5$. Ово су нормална и елементарна форма, редом.